Corrigé

Exercice 1 : Effet "rétro" au billard

1) La vitesse de glissement de la boule sur le tapis fixe est la vitesse du point I *de la boule* en contact avec le tapis :

$$\vec{v}_g(t=0) = \vec{v}_G(t=0) + \overrightarrow{IG} \wedge \vec{\Omega}(t=0) = [v_0 + R\Omega_0]\,\vec{e}_x.$$

A l'instant initial, la boule glisse dans le sens des x croissants puisque $v_0 > 0$ et $\Omega_0 > 0$.

2) **a)** Lois de Coulomb (général) : voir cours.
Ici puisque la boule glisse sur le tapis, la composante tangentielle est orientée vers les x négatifs et $\vec{T} = -\mu\, N\, \vec{e}_x$.

b) La boule est soumise à son poids appliqué en G et à la réaction du tapis appliquée en I. Théorème du centre d'inertie : $m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}$. Théorème du moment cinétique en G : $d\vec{L}_G/dt = \overrightarrow{GI} \wedge \vec{T}$.
On a donc après projection sur les trois axes (et $\vec{L}_G = I\vec{\Omega}$) :

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\mu\, N \\ 0 &= -mg + N \\ \frac{2}{5}mR^2\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= -\mu\, N\, R \end{aligned}$$

soit après élimination de N :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu\, g \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{5\mu\, g}{2R}$$

c) On intègre en tenant compte des conditions initiales :

$$v(t) = v_0 - \mu\, g\, t \qquad \text{et} \qquad \Omega(t) = \Omega_0 - \frac{5\mu\, g}{2R}\, t$$

La vitesse de glissement est alors donnée par

$$v_g(t) = v(t) + R\Omega(t) = v_0 + R\Omega_0 - \frac{7}{2}\mu g\, t.$$

d) La vitesse de glissement diminue au cours du temps jusqu'à s'annuler à l'instant t_1 tel que

$$t_1 = \frac{v_0 + R\Omega_0}{\frac{7}{2}\mu\, g} \qquad \text{et} \qquad v_1 = \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}R\Omega_0 \qquad \text{et} \qquad \Omega_1 = \frac{2}{7}\Omega_0 - \frac{5}{7}\frac{v_0}{R}$$

3) Pour $t > t_1$, l'hypothèse de roulement *avec* glissement n'est plus physique et doit être remplacée par un roulement *sans* glissement. Dans ce cas, v et Ω sont liées par la condition cinématique $v_g = v + R\Omega = 0$. Par ailleurs, on n'a plus $T = \mu\, N$ mais on a toujours $N = mg$.
Le théorème du centre d'inertie projeté sur Ox et le théorème du moment cinétique imposent

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -T \qquad \text{et} \qquad mR\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{5}{2}T$$

En additionnant membre à membre ces deux équations il vient

$$m\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}t} = 0 = -\frac{7}{2}T.$$

Ainsi, la composante tangentielle de la réaction est nulle (ce qui est compatible avec la loi de Coulomb) et le mouvement de la boule est alors uniforme $v(t) = v_1 = \text{cste}$ et $\Omega(t) = \Omega_1 = \text{cste}$.

4) Pour que la boule revienne en arrière, il faut donc que $v_1 < 0$, c'est-à-dire

$$\Omega_0 > \frac{5}{2}\frac{v_0}{R}.$$

La rotation initiale de la boule dans le sens positif doit être plus rapide que sa translation. On n'explique pas ici comment mettre la boule dans une telle situation, il faut bien laisser un peu d'initiative au joueur !

Exercice 2 : Étude d'un pendule articulé

1) Le point C possède un mouvement circulaire de rayon ℓ de centre A fixe dans le plan Axz, sa vitesse est donc donnée par $\vec{v}_C = \ell\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$, où $\vec{e}_\theta$ est le vecteur de la base cylindrique de centre A. Il en est de même pour le point D qui a la même vitesse.
La tige CD reste en permanence horizontale, elle est animée d'un mouvement de *translation ciruclaire* à la vitesse $\vec{v}_C$. Tous les points de la tige CD ont même vecteur vitesse. Ainsi l'énergie cinétique de la barre CD s'écrit tout simplement :

$$E_c(CD) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

2) La tige AC est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe Ay passant par une de ses extrémités donc

$$E_c(AC) = \frac{1}{2}I\Omega^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2,$$

où I est le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Ay (l'utilisation du théorème de Koenig est possible mais plus longue).
Il en est de même pour la tige BD de mouvement identique. La barre AB ne bougeant pas, l'énergie cinétique du losange articulé s'écrit donc

$$Ec = E_c(CD) + 2E_c(AC) = \frac{5}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

3) Le losange étant homogène, le centre de masse se situe au centre du losange donc en $z_G = -(\ell/2)\cos\theta$. L'énergie potentielle de pesanteur du losange complet de masse $4m$ vaut donc

$$E_p = 4mgz_G + \text{cste} = -2mg\ell\cos\theta + \text{cste}.$$

4) En sommant énergie cinétique et potentielle, on vérifie aisément

$$E_m = \frac{5}{6}m\ell^2\,\dot{\theta}^2 - 2mg\ell\cos\theta + \text{cste}.$$

5) Les liaisons sont parfaites, donc l'énergie mécanique se conserve et en dérivant son expression par rapport au temps, il vient

$$\frac{5}{3}m\ell^2\,\ddot{\theta} + 2mg\ell\sin\theta = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{\theta} + \frac{6}{5}\frac{g}{\ell}\sin\theta = 0,$$

équation différentielle d'un pendule pesant. Pour les petits mouvements ($\sin\theta \simeq \theta$) on retrouve un oscillateur harmonique de période $T = 2\pi\sqrt{5\ell/6g}$.